Meccanica Dei Robot

Universita degli studi Roma3

Docente: **Nicola Pio Belfiore**

Appunti di: **Aurora Mascioli**

NOTESTOBOOK
ELEVATE YOUR NOTES

Anno Accademico 2025/2026

Indice

1 Il Multibody

Ai fini del calcolo dei risultati e per evitare configurazioni critiche, si ricorre ad una trattazione basata sulla **rotazione asse-angolo**: una formulazione *non minimale* dove si esprime la matrice di assetto in funzione di 4 parametri anziché 3. Si opera in $SO(3)$: tutto si muove come se fosse un moto sferico attorno all'origine.

[Rotazione asse-angolo] Si stabilisce la posizione di un sistema di riferimento ruotato rispetto ad un sistema fisso specificando:

- la **direzione dell'asse di rotazione** $\vec{u}$ (versore);
- l'**angolo di rotazione** θ.

1.1 Derivazione della formula di Rodrigues

Si suppone di avere un generico corpo che ruota di un angolo θ attorno un asse passante per l'origine. Si fissa un sistema di riferimento $\{E\}$ dove $\vec{e}_3$ è lungo la direzione di rotazione e $\vec{e}_1$ è orientato in modo che il vettore $\vec{v}$, che unisce il generico punto P appartenente al corpo all'origine O, sia nel piano $\vec{e}_1\vec{e}_3$. A seguito della rotazione, il punto P si è spostato in P' ed è indicato con $\vec{v}'$.

Si vuole determinare la **matrice di assetto** $[A]$ che permette di passare da $\vec{v}$ a $\vec{v}'$, in funzione di θ e $\vec{u}$.

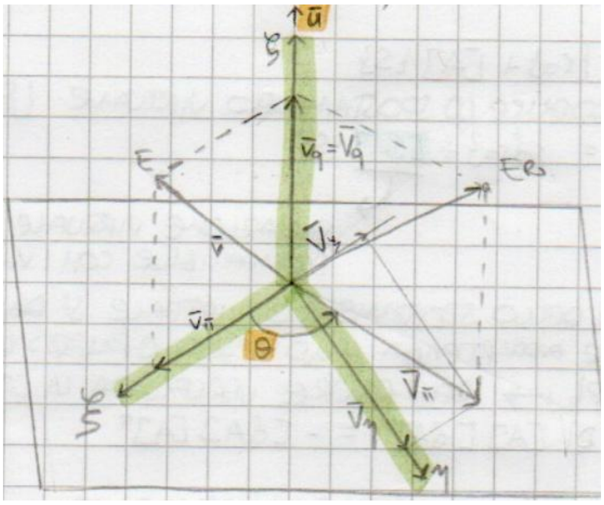

Figura 1: Rotazione di un vettore $\vec{v}$ attorno all'asse $\vec{u}$: decomposizione nelle componenti parallela $\vec{v}_{\|}$ e perpendicolare $\vec{v}_{\perp}$ all'asse.

Decomposizione del vettore.

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\|} + \vec{v}'_{\perp} \tag{1}$$

$$\vec{v}_{\|} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\,\vec{u} \tag{2}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\|} = -\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v}) \tag{3}$$

Componenti dopo la rotazione.

$$\vec{v}'_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel} \tag{4}$$

$$\vec{v}'_{\perp} = \vec{v}'_{\perp,1} + \vec{v}'_{\perp,2} \tag{5}$$

$$\vec{v}'_{\perp,1} = \cos\theta\,\vec{v}_{\perp} \tag{6}$$

$$\vec{v}'_{\perp,2} = \sin\theta\,(\vec{u}\times\vec{v}) \tag{7}$$

Si scrive il vettore $\vec{v}'$ come somma vettoriale dei termini:

[Formula di Rodrigues]

$$\vec{v}' = (\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{u} - \cos\theta\,\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) + \sin\theta\,(\vec{u}\times\vec{v}) \tag{8}$$

In forma matriciale:

$$\{v'\} = [A(\vec{u},\theta)]\{v\} \tag{9}$$

Si è trovata un'espressione della matrice di assetto che permette di esprimere la nuova posizione che il generico vettore $\vec{v}$ assume dopo una rotazione di un angolo θ attorno alla retta definita dal versore $\vec{u}$.

1.2 Parametri di Eulero

Si perviene ad una formulazione più compatta ed elegante della matrice di assetto in notazione asse-angolo introducendo i **parametri di Eulero**:

[Parametri di Eulero]

$$e_0 = \cos\frac{\theta}{2}, \quad e_1 = u_1\sin\frac{\theta}{2}, \quad e_2 = u_2\sin\frac{\theta}{2}, \quad e_3 = u_3\sin\frac{\theta}{2} \tag{10}$$

con la **condizione di normalizzazione**:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{11}$$

Introducendo il vettore $\{e\} = \{u\}\sin\frac{\theta}{2}$, si ottiene la forma compatta di $[A]$:

[Matrice di assetto con parametri di Eulero]

$$[A] = (2e_0^2 - 1)[I_3] + 2\{e\}\{e\}^T + 2e_0[\tilde{e}] \tag{12}$$

dove $[\tilde{e}]$ è la matrice antisimmetrica associata al vettore $\{e\}$.

Esistono più modi per calcolare i parametri di Eulero, che sono dipendenti fra loro: si sceglie quello che fornisce il risultato più preciso numericamente.

1.3 Analisi cinematica con parametri di Eulero

Definiti i parametri di Eulero, si vuole svolgere un'analisi cinematica (e poi dinamica) attraverso questi parametri. Si introducono:

Vettore dei parametri.

Il vettore di 4 elementi $\{p\}$, corredato dalla condizione di normalizzazione:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix}, \quad \{p\}^T\{p\} = e_0^2 + \{e\}^T\{e\} = 1 \tag{13}$$

Matrici $[E]$ e $[G]$.

$$[E] = \begin{bmatrix} -\{e\} & [\tilde{e}] + e_0[I_3] \end{bmatrix} \quad \text{dimensione } [3 \times 4] \tag{14}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} -\{e\} & -[\tilde{e}] + e_0[I_3] \end{bmatrix} \quad \text{dimensione } [3 \times 4] \tag{15}$$

Tali che:

$$[A] = [E][G]^T \tag{16}$$

Le matrici $[E]$ e $[G]$ sono propriamente scelte per restituire $[A]$.

Relazioni cinematiche.

I parametri di Eulero sono funzione del tempo. Le derivate di $[E]$ e $[G]$ sono associate alla derivata di $[A]$, e derivando $\{p\}$ si conosce la posizione successiva del riferimento.

Dalle derivate di $\{p\}$, $[E]$ e $[G]$ si ricavano relazioni che forniscono $[\dot{A}]$ e $\{\omega\}$:

- Si correla la variazione di $[E]$ e $[G]$ (e quindi una variazione dei parametri di Eulero) a $\{\omega\}$.
- Si ottiene $[\dot{A}]$ funzione solo di $[G]$ e della sua derivata.
- Nota $[\dot{A}]$, si ricava $\{\omega\}$ legata a $[G]$ e $\{\dot{p}\}$.

Nel riferimento fisso si usa $[E]$ al posto di $[G]$ nell'espressione di $\{\omega\}$.

Derivando $\{\omega\}$ si ottiene l'accelerazione angolare espressa nel riferimento mobile o nel riferimento fisso, permettendo di legare le derivate seconde dei parametri di Eulero all'accelerazione angolare.

1.4 Analisi dinamica – Cenni introduttivi

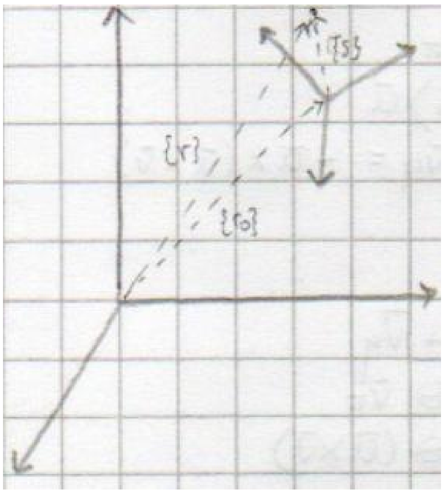

Figura 2: Sistema di riferimento fisso e mobile con spostamento virtuale $\{dr\}$.

La posizione di un punto generico è:

$$\{r\} = \{r_0\} + [A]\{s\} \tag{17}$$

Si introduce lo **spostamento virtuale** $\{dr\}$:

$$\{dr\} = \{dr_0\} + [dA]\{s\} \tag{18}$$

dove $[dA]$ rappresenta la variazione virtuale della matrice di assetto, compatibile con i vincoli.

A seguito dello spostamento virtuale, si deve ottenere una matrice $[A + dA]$ che appartenga allo stesso gruppo di $[A]$ (teoria dei gruppi): deve essere verificata la condizione di ortogonalità

$$[A][dA]^T = -[dA][A]^T \tag{19}$$

[Matrice di rotazione virtuale]

$$[d\Theta] = [dA][A]^T \tag{20}$$

Di conseguenza:

$$\{dr\} = \{dr_0\} + [d\Theta][A]\{s\} = \{dr_0\} + [d\Theta]\{r_{rel}\} \quad \text{(riferimento fisso)} \tag{21}$$

$$\{dr\} = \{dr_0\} + [A]([d\theta]\{s\}) \quad \text{(riferimento mobile)} \tag{22}$$

Notazione con quaternioni.

In alternativa alla notazione matriciale, si può usare la notazione con **quaternioni**, sempre definiti a partire dai parametri di Eulero:

$$q = \underbrace{e_0}_{\text{parte reale}} + \underbrace{e_1 i + e_2 j + e_3 k}_{\text{parte immaginaria}} \tag{23}$$

I quaternioni, pur essendo composti da soli 4 parametri, hanno associata una notazione e una matematica dedicata.

Sintesi.

- Nota la posizione, si ricavano i parametri di Eulero e quindi la matrice $[G]$.
- Con $[G]$ e $[\dot{G}]$ si calcola $[\dot{A}]$ poiché $[\dot{A}] \propto [G][\dot{G}]^T$.
- Nota $[\dot{A}]$ si calcola $\{\omega\}$ che è legata a $[G]$ e $\{\dot{p}\}$.
- Derivando $\{\omega\}$ si ottiene l'accelerazione angolare, legata a $\{\ddot{p}\}$.

2 Equazioni di Newton–Eulero per la dinamica del Multibody

Si ricordano le **equazioni cardinali** espresse in forma vettoriale:

$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{H}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p} \end{cases} \tag{24}$$

Il termine $\vec{v}_O \times \vec{p} = 0$ se si sceglie accuratamente il polo (ad esempio coincidente con il baricentro o fisso).

2.1 Sistema di riferimento e notazione

Si considera un sistema rigido di masse localizzate (la distanza fra masse è fissa). Si studia il singolo corpo j-esimo e si definiscono i sistemi di riferimento:

- **Fisso** (F)
- **Mobile** (locale al corpo j-esimo)

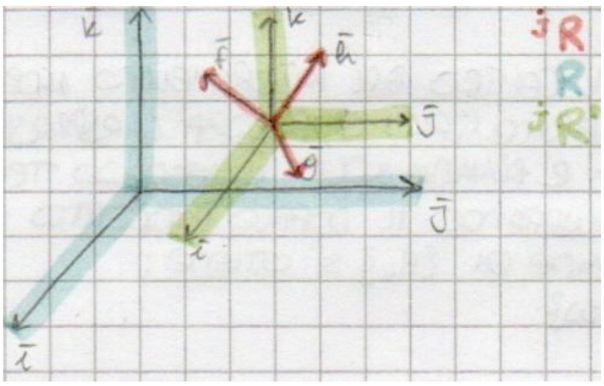

Figura 3: Sistema di riferimento fisso (F) e mobile (R) con decomposizione del vettore posizione.

2.2 Prima equazione cardinale

Si riscrive la prima equazione cardinale in notazione matriciale:

[Prima equazione cardinale – forma matriciale]

$$\{F\} = \{\dot{p}\} = [M]\{\ddot{r}_G\} \tag{25}$$

dove:

$$\{F\} = \{F_x\ F_y\ F_z\}^T \tag{26}$$

$$\{p\} = M\{\dot{r}_{Gx}\ \dot{r}_{Gy}\ \dot{r}_{Gz}\}^T \quad \text{(vettore q.d.m.)} \tag{27}$$

$$\{r_G\} = \{r_{Gx}\ r_{Gy}\ r_{Gz}\}^T \tag{28}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \quad \text{(matrice delle masse)} \tag{29}$$

2.3 Seconda equazione cardinale – Momento della quantità di moto

Momento rispetto un polo generico A.

$$\vec{H}_A = \sum_i \vec{r}_{Ai} \times \vec{p}_i \equiv \{H_A\} = \sum_i m_i[\tilde{r}_{Ai}]\{\dot{r}_i\} \tag{30}$$

dove $\vec{r}_{Ai} = \vec{r}_{AG} + \vec{r}_{Gi}$ per $i = 1, \ldots, N$.

Sostituendo l'espressione di $\{r_{Ai}\}$ in $\{H_A\}$, il momento totale della quantità di moto si suddivide in due addendi:

$$\vec{H}_A = \sum_i m_i \vec{r}_{AG} \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times \vec{v}_i \tag{31}$$

Per la definizione di baricentro:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{r}_{AG} \times \vec{v}_i = M[\tilde{r}_{AG}]\{\dot{r}_G\} \tag{32}$$

[Teorema del trasporto del momento]

$$\{H_A\} = \{H_G\} + M[\tilde{r}_{AG}]\{\dot{r}_G\} \tag{33}$$

Momento rispetto all'origine del riferimento mobile.

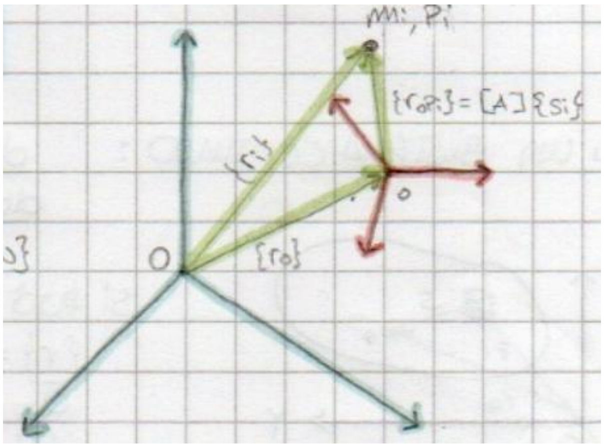

Figura 4: Decomposizione della posizione nel riferimento mobile.

$$\vec{H}_O = \sum_i m_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{v}_i \tag{34}$$

con $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}_{Gi}$ e $\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Gi}$.

Sviluppando:

$$\vec{H}_O = \sum_i m_i(\vec{r}_O \times \vec{v}_O) + \sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Gi}) \tag{35}$$

Poiché:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{Gi} = [A] \sum_i m_i \{s_i\} = M\vec{r}_G \tag{36}$$

Applicando le regole del doppio prodotto vettoriale:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{Gi}) = [A][J]\{^j\omega\} \tag{37}$$

Si studia nei riferimenti locali perché, prima di assemblare il sistema completo, i singoli corpi si possono analizzare solo nel proprio riferimento locale.

[Momento della q.d.m. rispetto all'origine mobile]

$$\{H_O\} = M[\tilde{r}_G]\{\dot{r}_O\} + [A][J]\{^j\omega\} \tag{38}$$

Se l'origine del riferimento mobile coincide con il baricentro, il primo termine è nullo ($\{r_G\} = \{0\}$).

2.4 Formulazione per massa distribuita

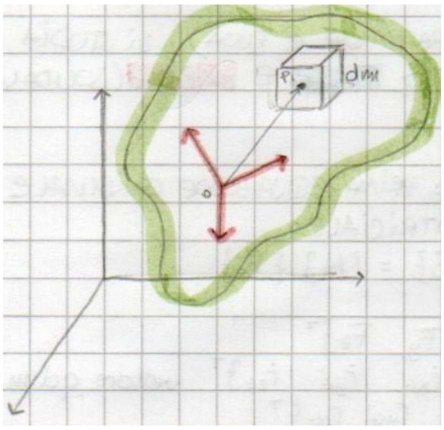

Figura 5: Elemento di massa dm posizionato in P_i con vettori posizione.

Si definisce il momento della quantità di moto con polo in G espresso nel riferimento j-esimo:

$$\{^j H_G\} = \int_V [\tilde{r}_i^j]\{\dot{r}_i^j\}\, dm \tag{39}$$

Essendo $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Gi}$:

$$\{^j H_G\} = -[\tilde{r}_G^j] \int_V \{^j r_{Gi}\}\, dm + \int_V [\tilde{r}_{Gi}^j][\tilde{\omega}^j]\{^j r_{Gi}\}\, dm \tag{40}$$

Se il centro del riferimento mobile O coincide con il baricentro G, l'espressione si semplifica perché $\int_V \{^j r_{Gi}\}\, dm = 0$:

[Momento della q.d.m. rispetto al baricentro]

$$\{^j H_G\} = [^j J_G]\{^j \omega\} \tag{41}$$

Momento rispetto a un polo generico A.

Applicando il teorema di Huygens-Steiner:

$$\{^j H_A\} = M[\tilde{r}_{AG}^j]\{^j \dot{r}_A\} + [^j J_A]\{^j \omega\} \tag{42}$$

2.5 Derivata del momento della quantità di moto

La seconda equazione cardinale stabilisce che:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \tag{43}$$

Il termine $\sum_i \vec{v}_i \times \vec{p}_i = 0$ perché $\vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$.

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}_{=0} \tag{44}$$

I momenti delle forze interne si bilanciano.

[Seconda equazione cardinale] Per un sistema di masse localizzate:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O \tag{45}$$

Per un sistema continuo:

$$\frac{d\{^jH_O\}}{dt} = \int_V [\tilde{r}_i^j]\{^j\ddot{r}_i\}\,dm \tag{46}$$

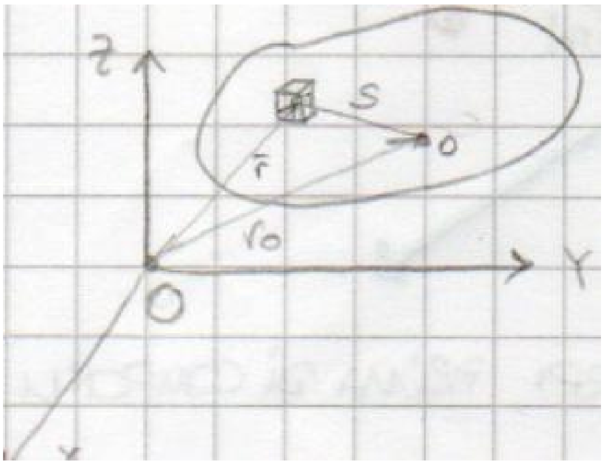

Figura 6: Schema per il calcolo della derivata del momento della q.d.m.

Espressioni cinematiche.

$$\{^jr_i\} = \{^jr_O\} + \{^jr_{Gi}\} \tag{47}$$

$$\{^j\dot{r}_{Gi}\} = [\tilde{\omega}^j]\{^jr_{Gi}\} \tag{48}$$

$$\{^j\ddot{r}_i\} = \{^j\ddot{r}_O\} + [\dot{\tilde{\omega}}^j]\{^jr_{Gi}\} + [\tilde{\omega}^j][\tilde{\omega}^j]\{^jr_{Gi}\} \tag{49}$$

Sostituendo in $\frac{d\{^jH_O\}}{dt}$ si ottiene un'espressione con 6 addendi, ognuno dei quali viene sviluppato e semplificato separatamente.

2.6 Momento delle forze esterne

Si calcola il momento delle forze esterne rispetto al polo O:

$$\vec{M}_O = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_k \vec{r}_O \times m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} + \sum_k \vec{r}_{Ok} \times \vec{F}_k \tag{50}$$

$$= \vec{r}_O \times M \frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} + \vec{M}_o \tag{51}$$

In notazione matriciale:

$$\{M_O\} = M[\tilde{r}_O]\{\ddot{r}_G\} + \{M_o\} \tag{52}$$

dove $\{M_o\}$ è il momento delle forze esterne rispetto al polo o, origine del riferimento locale.

Equazione di Eulero.

Eguagliando le espressioni di $\frac{d\{H_O\}}{dt}$ e $\{M_O\}$, e supponendo $o \equiv G$:

[Equazione di Eulero per moti rotazionali]

$$\{M_o\} = [J_o]\{\alpha\} + [\tilde{\omega}][J_o]\{\omega\} \tag{53}$$

Questa equazione si scrive per tutti i corpi del sistema nelle sue 3 componenti scalari M_x, M_y, M_z.

2.7 Sistema di Newton–Eulero in forma compatta

Combinando le due equazioni cardinali:

[Equazioni di Newton–Eulero]

$$\begin{bmatrix} M[I] & 0 \\ 0 & [J_o] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{r}_G\} \\ \{\alpha\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{M_o\} - [\tilde{\omega}][J_o]\{\omega\} \end{Bmatrix} \tag{54}$$

dove $[J_o]$ è la matrice di inerzia.

3 La simulazione dinamica nel Multibody

Si studia il problema attraverso l'approccio basato sui **moltiplicatori di Lagrange**, a cui si aggiunge l'equazione di vincolo.

3.1 Formulazioni con diverso indice differenziale

Indice 3: $\{\Phi(q,t)\} = \{0\}$

Indice 2: $[\Phi_q]\{\dot{q}\} + \{\Phi_t\} = \{0\}$ (derivando l'equazione di vincolo)

Indice 1: $[\Phi_q]\{\ddot{q}\} = \{\gamma\}$, riconducibile a un sistema ODE: $[A]\{x\} = \{b\}$

Le equazioni di vincolo sono sempre aggiunte al sistema di equazioni della dinamica:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\Phi_q]^T\{\lambda\} = \{F\} \tag{55}$$

Con l'approccio a indice differenziale 1:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\Phi_q]^T\{\lambda\} = \{F\} \tag{56}$$

$$[\Phi_q]\{\ddot{q}\} = \{\gamma\} \tag{57}$$

In forma matriciale compatta $[A]\{x\} = \{b\}$:

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & [\Phi_q]^T \\ [\Phi_q] & [0] \end{bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \tag{58}$$

3.2 Equazioni di vincolo nello spazio

Si ragiona nello spazio usando i parametri di Eulero. Si considerano i corpi i e j che costituiscono una coppia cinematica.

[Condizione di vincolo generale]

$$\{\Phi(\{r_i\},[A_i],\{r_j\},[A_j])\} = \{0\} \tag{59}$$

L'equazione è composta da tante equazioni scalari quanti sono i gradi di vincolo della coppia.

Differenziando:

$$[\Phi_r]\{dr\} + [\Phi_\theta]\{\delta\theta\} = \{0\} \tag{60}$$

La matrice $[\Phi_\theta]$ non è uno Jacobiano nel senso classico: $\{\delta\theta\}$ si ottiene dalla matrice degli spostamenti virtuali $[\delta\Theta] = [\delta A][A]^T$. La matrice $[\delta\Theta]$ è antisimmetrica, associata al vettore $\{\delta\theta\}$.

Esempio: coppia sferica.

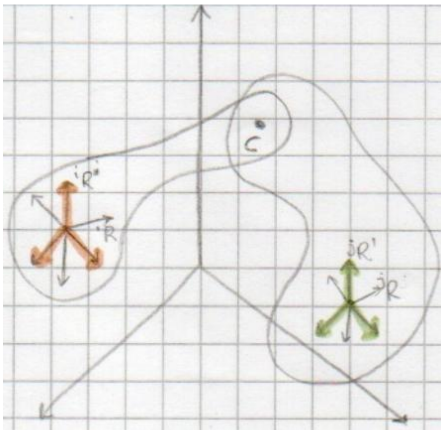

Figura 7: Coppia sferica tra i corpi i e j con punto comune C.

Si considera un punto C comune ai due corpi:

$$\{r_C^{(i)}\} = \{r_i\} + [A_i]\{s_C^i\} \tag{61}$$

$$\{r_C^{(j)}\} = \{r_j\} + [A_j]\{s_C^j\} \tag{62}$$

L'equazione di vincolo è:

$$\{\Phi\} = \{r_i\} + [A_i]\{s_C^i\} - \{r_j\} - [A_j]\{s_C^j\} = \{0\} \tag{63}$$

Differenziando e introducendo la relazione $\{\delta\theta\} = 2[G]\{\delta p\}$:

$$[\Phi_{r_i}]\{\delta r_i\} + [\Phi_{\theta_i}]\{\delta\theta_i\} + [\Phi_{r_j}]\{\delta r_j\} + [\Phi_{\theta_j}]\{\delta\theta_j\} = \{0\} \tag{64}$$

Introducendo le matrici $[\Phi_i]$ e $[\Phi_j]$, si arriva a una forma compatta:

$$[\Phi_i]\{\dot{r}_i\} + [\Phi_{p_i}]\{\dot{p}\} = \{0\} \tag{65}$$

Derivando ulteriormente per ottenere le accelerazioni:

$$[\Phi_r]\{\ddot{r}\} + [\Phi_p]\{\ddot{p}\} = \{\gamma\} \tag{66}$$

3.3 Equazioni della dinamica con parametri di Eulero

Prima equazione cardinale.

$$\{F\} + \{f\} = [M]\{\ddot{r}\} \tag{67}$$

con $\{F\} = -[\Phi_r]^T\{\lambda\}$ (forze vincolari).

Quindi:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [\Phi_r]^T\{\lambda\} = \{f\} \tag{68}$$

Seconda equazione cardinale.

$$\{M\} = [J_\omega]\{\dot{\omega}\} + [\tilde{\omega}][J_\omega]\{\omega\} \tag{69}$$

dove il momento $\{M\}$ si partiziona in momento delle forze attive e momento delle forze vincolari:

$$\{M^{vinc}\} = -[\Phi_\theta]^T\{\lambda\} \tag{70}$$

Vincolo di normalizzazione.

$$\{p\}^T\{p\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \{p\}^T\{p\} - 1 = 0 \tag{71}$$

Si introduce:

$$\{\Phi^p(p)\} = \begin{Bmatrix} \{p_1\}^T\{p_1\} - 1 \\ \vdots \\ \{p_n\}^T\{p_n\} - 1 \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{72}$$

Derivando due volte:

$$[\Phi_p^p]\{\ddot{p}\} = -\{\dot{p}\}^T\{\dot{p}\} \cdot \{u\} \tag{73}$$

dove $\{u\}$ è un vettore unitario appropriato.

3.4 Sistema completo

Si assemblano le equazioni cardinali, il vincolo sui parametri di Eulero e le equazioni di vincolo:

[Sistema dinamico del Multibody]

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{q}\} + [\Phi_q]^T\{\lambda\} &= \{F\} \\ [\Phi_q]\{\ddot{q}\} &= \{\gamma\} \end{aligned} \tag{74}$$

con:

- $\{\lambda\}$: vettore dei moltiplicatori di Lagrange (lineari λ e rotazionali λ^θ)
- $\{\gamma\}$: vettore delle accelerazioni centrifughe e complementari
- $\{F\}$: vettore delle forze generalizzate
- $\{\ddot{q}\}$: vettore delle coordinate lagrangiane

I parametri di Eulero aumentano all'aumentare del numero di corpi: $\{p_i\}$ per il singolo corpo i-esimo. Di conseguenza, servono altrettanti vincoli di normalizzazione.

Sintesi.

- La formulazione asse-angolo con parametri di Eulero evita singolarità tipiche degli angoli di Eulero classici.
- Le equazioni di Newton–Eulero combinano traslazione e rotazione in un unico sistema matriciale.
- L'approccio con moltiplicatori di Lagrange permette di includere sistematicamente i vincoli.
- Il vincolo di normalizzazione $\{p\}^T\{p\} = 1$ è necessario per ogni corpo del sistema.
- La riduzione dell'indice differenziale (da 3 a 1) trasforma il sistema algebrico-differenziale in un sistema ODE risolvibile numericamente.